第 41 卷　第 6 期
2024 年 12 月
应　用　力　学　学　报
Chinese Journal of Applied Mechanics
Vol. 41 No. 6
Dec. 2024

文章编号:1000-4939(2024)06-1327-09

基于能量有限元的薄板结构多目标拓扑优化

解妙霞,朱明辉,姚飞龙,张鹏,吕宗阳,韩俊宏

(西安建筑科技大学机电工程学院,710055 西安)

摘　要:拓扑优化设计是结构设计中降低成本和实现轻量化的关键环节。能量有限元法(energy finite element analysis,EFEA)是高频动响应分析的有力工具。在高频动力学拓扑优化中,用能量有限元法代替有限元法(finite element analysis,FEA)进行动响应计算可以获得较高的计算效率和计算精度。为了使能量有限元求解和拓扑优化过程能够有效衔接,促进基于能量有限元法的高频动力学拓扑优化的工程应用,建立了基于能量有限元法的多目标拓扑优化模型。基于能量有限元法,以最小能量柔度和感兴趣单元最小能量密度作为高频动力学拓扑优化的目标函数,采用“线性加权法”,建立多目标情况下的拓扑数学模型;再对模型进行离散化,进而对其进行灵敏度计算,通过灵敏度过滤和最优化准则得到多目标拓扑优化构型。最后通过算例,分析不同激励频率对拓扑构型的影响,揭示不同目标权重系数对拓扑构型的交叉影响规律。结果表明,当权重系数相同,激励频率不同时,中高频的减重百分比较低频大;当频率相同,权重系数比为 1∶1时,减重百分比最大。基于能量有限元的高频动力学拓扑优化模型有利于发展飞行器等易诱发高频振动的结构的优化设计理论,优化设计结果对实际的结构设计具有一定的参考价值。

关键词:能量有限元法;能量柔度;高频动响应;多目标拓扑优化

中图分类号:TH113.1　　**文献标志码:**A　　**DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2024.06.012

Multi-objective topology optimization of thin-plates based on energy finite element analysis

XIE Miaoxia,ZHU Minghui,YAO Feilong,ZHANG Peng,LÜ Zongyang,HAN Junhong

(School of Mechanical and Electrical Engineering,Xi'an University of Architecture and Technology,710055 Xi'an,China)

Abstract: Topology optimization design can make for cost saving and achieving lightweight structures. The energy finite element analysis (EFEA) is a powerful tool to predict high-frequency dynamic responses. In the topology optimization for high-frequency dynamics problem, applying EFEA to predict dynamic responses, instead of finite element analysis (FEA), can achieve higher computational efficiency and computational accuracy. To promote the engineering application of high-frequency dynamic topology optimization based on EFEA, the following researches are performed. Based on EFEA, the minimum energy flexibility

收稿日期:2022-04-07　　**修回日期:**2022-06-01
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(No. 2020JM-484)
通信作者:解妙霞,副教授。E-mail:xiemiaoxia@xauat.edu.cn
引用格式:解妙霞,朱明辉,姚飞龙,等.基于能量有限元的薄板结构多目标拓扑优化[J].应用力学学报,2024,41(6):1327-1335.
XIE Miaoxia, ZHU Minghui, YAO Feilong, et al. Multi-objective topology optimization of thin-plates based on energy finite element analysis [J]. Chinese journal of applied mechanics,2024,41(6):1327-1335.

and the minimum energy density in the element of interest are taken as the objective function, and the "linear weighting method" is used to establish a topology mathematical model under the multi-objective situation. Then the model is discretized, and the sensitivity is calculated. Through the sensitivity filtering and optimized criterion, a multi-objective topology optimization configuration can be obtained. Finally, for a plate, the influences of different excitation frequencies and different weight coefficients on the topological configuration are analyzed. The results show that if the weight coefficient is the same but the excitation frequency is different, the weight loss percentage of the middle and high frequencies is higher than that of the low frequency. If the frequency is same and the weight coefficient ratio is 1∶1, the weight loss percentage is the largest. The high-frequency dynamic topology optimization design model based on EFEA is conducive to the development of optimal design theory for structures prone to high-frequency vibration, such as aircraft, and the optimal design results have a certain reference value for actual structural design.

Key words: energy finite element analysis; energy flexibility; high-frequency dynamic response; topological optimization

安全性和可靠性是决定航空航天飞行器有效性的极为重要的关键技术指标之一。而飞行器在服役过程中的剧烈振动是影响其可靠性和安全性的重要因素。由于其结构多由大尺寸构件组成，且飞行速度较高，极易被诱发高频振动。要确保飞行器可以正常工作并保证它的安全性与可靠性，就必须设计出符合动力学响应条件的结构。另一方面，飞行器结构常有轻量化设计要求。这就需要在满足动力学响应条件的前提下，利用拓扑优化分析结构上材料的合理分布。能量有限元法是高频动力学响应分析的有力工具。基于能量有限元的拓扑优化将是飞行器等结构设计的关键环节之一。

能量有限元法来源于能量流的研究。1992 年，BOUTHIER 等[1-3]开始对平板结构的能量有限元法做了初步探索。2008 年，YAN[4]开发了一种新的用于复合材料层合板模型的 EFEA（energy finite element analysis）公式，通过与划分细密的有限元模型计算结果进行对比，来验证 EFEA 公式的正确性；同年，MORAVAEJI[5]将能量有限元法应用于饰板结构。后来，西安交通大学的何理等[6]验证了正交异性薄板结构能量密度控制方程的正确性，分析了不同位置的局部阻尼分布对正交异性薄板结构振动能量传递特性的影响。

近年来，已有不少学者在动力学拓扑优化方面做出贡献[7-21]，但其研究大都是基于有限元法的拓扑优化。2013 年王端义等[22]基于 DU 等[23-24]的研究提出了将能量有限元法与拓扑优化方法结合；2021 年 LIU 等[25]基于能量有限元法，第一次建立了基于 EFEA 的薄壁结构拓扑优化框架，分别以不同的目标函数，不同的研究对象，从不同的角度研究了基于能量有限元的拓扑优化方法。

本研究利用变密度法[26]，以最小能量柔度、感兴趣单元的最小能量密度为目标函数，采用"线性加权法"建立多目标函数拓扑优化的数学模型[27]，再对多目标数学模型进行求解。最后通过算例，分析拓扑优化构型的合理性，及不同激励频率、权重系数对拓扑构型的影响。

1 多目标拓扑模型的建立与求解

多目标拓扑优化设计的流程如图 1 所示。

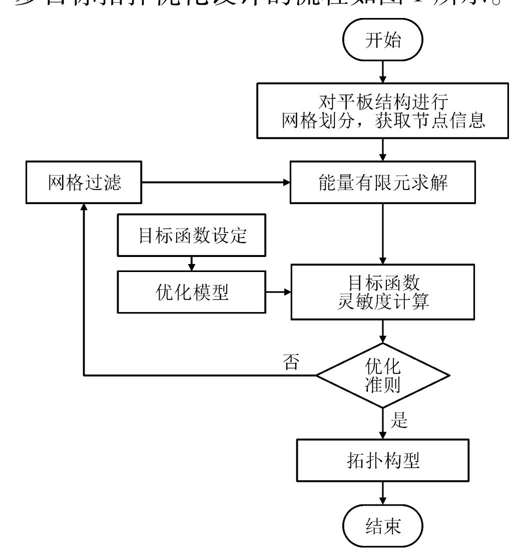


图 1 拓朴优化流程

Fig. 1 Flow chart of topology optimization

建立平板结构多目标拓扑优化模型并求解，需要完成以下 4 个方面的工作：①根据平板结构的能量有限元理论求解其能量密度分布；②根据能量有

限元和拓扑优化参量的关系，建立子目标函数；③由“线性加权法”建立多目标拓扑优化模型；④对模型进行求解，包括灵敏度计算和优化准则。

1.1　板的能量有限元理论

不考虑平板结构面内和面外振动的相互耦合，平板结构面外弯曲振动的能量密度控制微分方程[28]为

$$-\frac{c_{\mathrm{g}}^{2}}{\eta\omega}\nabla^{2}\langle\bar{e}\rangle+\eta\omega\langle\bar{e}\rangle=\langle\bar{\pi}_{\mathrm{in}}\rangle \tag{1}$$

式中：η 是迟滞阻尼系数；$\langle\bar{e}\rangle$ 是结构中传播的弯曲波的时间和空间平均能量密度；$\langle\bar{\pi}_{\mathrm{in}}\rangle$ 是结构的输入功率；c_{g} 是弯曲波的群速度，且

$$c_{\mathrm{g}}=2\times\sqrt[4]{\frac{\omega^{2}D}{\rho h}}=2\times\sqrt[4]{\frac{\omega^{2}Eh^{2}}{12\rho(1-\upsilon^{2})}} \tag{2}$$

式中：E 为薄板结构的弹性模量；h 是板的厚度；υ 为泊松比；ρ 为结构的材料密度；ω 为激励频率。

根据 Galerkin 加权余量法，得到单元内能量密度控制方程的矩阵形式为

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{e}_{i}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{F}_{i}^{\mathrm{e}}-\boldsymbol{Q}_{i}^{\mathrm{e}} \tag{3}$$

式中

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{e}}=\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}\left(\frac{c_{\mathrm{g}}^{2}}{\eta\omega}\nabla N_{i}\nabla N_{j}+\eta\omega N_{i}N_{j}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

$$\boldsymbol{F}_{i}^{\mathrm{e}}=\int_{\Omega^{\mathrm{e}}}N_{i}\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{in}}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5}$$

$$\boldsymbol{Q}_{i}^{\mathrm{e}}=\oint_{\Gamma^{\mathrm{e}}}N_{i}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{I})\mathrm{d}\Gamma^{\mathrm{e}} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{e}_{i}^{\mathrm{e}}=[e_{1}^{\mathrm{e}},e_{2}^{\mathrm{e}},e_{3}^{\mathrm{e}},\cdots,e_{n}^{\mathrm{e}}]^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{e}}$ 为单元刚度矩阵和类似质量项的系数矩阵之和；$\boldsymbol{F}_{i}^{\mathrm{e}}$ 为单元节点的能量输入列向量；$\boldsymbol{Q}_{i}^{\mathrm{e}}$ 为能量流有关的项，本研究的研究对象为各向同性的薄板结构，不涉及单元、结构和单元之间的耦合，故不考虑此项；$\boldsymbol{e}_{i}^{\mathrm{e}}$ 为板单元各个节点的能量密度列向量。将各单元矩阵方程组集并求解，即可得各节点处的能量密度。

1.2　子目标函数的建立

本研究采用变密度法建立拓扑优化模型，变密度法的材料插值模型主要有固体各向同性惩罚函数法（solid isotropic material with penalization，SIMP）[29]和材料属性的合理近似模型（rational approximation of material properties，RAMP）。本研究主要采用 SIMP 模型建立优化变量和材料参数之间的关系。设 $\bar{\rho}$ 为连续的归一化优化变量，可以将能量有限元方程中的参量表示成归一化密度 $\bar{\rho}$ 的插值函数。由于能量有限元法中的参量有波群速度 c_{g} 和阻尼因子 η，而波群速度又与杨氏模量 E 及密度 ρ 有关系，因此，可以通过杨氏模量 E 及密度 ρ 与归一化参量 $\bar{\rho}$ 的关系，间接获得波群速度和归一化参量 $\bar{\rho}$ 之间的关系。这里 $\bar{\rho}$ 的取值范围为 $0<\bar{\rho}_{\min}\leqslant\bar{\rho}\leqslant1$。密度 ρ、杨氏模量 E 和阻尼系数 η 可以分别表示为优化变量 $\bar{\rho}$ 的插值函数，即

$$\rho=\bar{\rho}^{p}\rho_{\max} \tag{8}$$

$$E=\bar{E}^{r}E_{\max} \tag{9}$$

$$\eta=\bar{\eta}^{s}\eta_{\max} \tag{10}$$

式中，p、r 和 s 分别为密度 ρ、杨氏模量 E 和阻尼系数 η 的惩罚因子。

如以感兴趣单元的能量密度最小为优化目标函数，则该目标函数可以表示为

$$c_{\min}=\sum_{e=1}^{4}(\bar{\rho}^{\mathrm{e}})^{p}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} \tag{11}$$

以最小能量柔度（结构储能最小）为优化目标函数时，该目标函数可以表示为

$$\Pi_{\min}=\sum_{e=1}^{n}(\bar{\rho}^{\mathrm{e}})^{p}\boldsymbol{e}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{e}} \tag{12}$$

1.3　多目标拓扑优化数学模型的建立

在很多实际的薄板结构优化问题中，通常包含多个需要解决的不相容的目标。对于多目标优化问题，可以通过“线性加权法”将各目标函数结合起来，构成一个总的目标函数。线性加权法是根据各个单目标在要解决问题中的重要程度，给单目标函数分别赋予一个系数，这些系数之和为 1，再将这些带有权重系数的单目标函数相加，作为多目标优化的目标函数，从而达到同时优化多个不同的单目标函数的目的[30]。

以最小能量柔度为目标函数的数学模型为

$$\Pi_{\min}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E} \tag{13}$$

$$\mathrm{s.\,t.}:\begin{cases}\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{e}_{i}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{F}_{i}^{\mathrm{e}}-\boldsymbol{Q}_{i}^{\mathrm{e}}\\ V-V_{0}\leqslant0\\ 0<\bar{\rho}_{\min}\leqslant\bar{\rho}\leqslant1\end{cases} \tag{14}$$

式中：V 为优化后的构型体积；V_0 为初始体积。以感兴趣单元最小能量密度为目标函数的数学模型

$$c_{\min}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} \tag{15}$$

$$s.\,t.:\begin{cases}\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{e}_{i}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{F}_{i}^{\mathrm{e}}-\boldsymbol{Q}_{i}^{\mathrm{e}}\\ V-V_{0}\leqslant0\\ 0<\bar{\rho}_{\min}<\bar{\rho}\leqslant1\end{cases} \tag{16}$$

则多目标优化的数学模型可以表示为

$$M(\bar{\rho})_{\min} = w_1\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E} + w_2\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} \tag{17}$$

$$s.t.:\begin{cases}\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{e}} - \boldsymbol{Q}_i^{\mathrm{e}}\\ V - V_0 \leqslant 0\\ 0 < \bar{\rho}_{\min} < \bar{\rho} \leqslant 1\end{cases} \tag{18}$$

式中

$$w_1 + w_2 = 1 \tag{19}$$

由式(11)~(12)可对上述模型进行离散化,则式(17)可以表示为

$$M(\bar{\rho}) = w_1\sum_{e=1}^{n}(\bar{\rho}^{\mathrm{e}})^p\boldsymbol{e}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{e}} + w_2\sum_{e=1}^{4}(\bar{\rho}^{\mathrm{e}})^p\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} \tag{20}$$

1.4 多目标拓扑优化模型的求解

为了设定收敛条件,需要求连续体的多目标拓扑优化的目标函数对设计变量的灵敏度。本研究采用"直接求导法"。设 $M(\bar{\rho})$ 为目标函数,$\bar{\rho}$ 为设计变量,并假定 $M(\bar{\rho})$ 关于 $\bar{\rho}$ 连续变化。则 $M(\bar{\rho})$ 关于设计变量 $\bar{\rho}$ 的偏导数由以下等式推导得到,本研究中多目标函数为

$$M(\bar{\rho}) = w_1\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E} + w_2\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} \tag{21}$$

根据链式求导法则,对式(21)求设计变量的偏导数可以得到

$$\frac{\partial M(\bar{\rho})}{\partial\bar{\rho}} = 2w_1\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial\bar{\rho}} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial\bar{\rho}}\boldsymbol{E} + 2w_2\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial\bar{\rho}} \tag{22}$$

插值函数式(8)~(10)对设计变量的一阶导数为

$$\frac{\partial E}{\partial\bar{\rho}} = r\bar{\rho}^{r-1}E_{\max} \tag{23}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\rho}} = s\bar{\rho}^{s-1}\eta_{\max} \tag{24}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\bar{\rho}} = p\bar{\rho}^{p-1}\rho_{\max} \tag{25}$$

将式(23)~(25)代入 $\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial\bar{\rho}}$ 中可得

$$\frac{\partial\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{e}}}{\partial\bar{\rho}} = \int_{\Omega^{\mathrm{e}}}\left(-\frac{c_{\mathrm{g}}^2}{\eta^2\omega}\nabla N^i\,\nabla N^j + \omega N^iN^j\right)s\bar{\rho}^{s-1}\eta\delta\bar{\rho}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}} + \int_{\Omega^{\mathrm{e}}}\left(\frac{2c_{\mathrm{g}}}{\eta\omega}\nabla N^i\,\nabla N^j\right)\cdot\left(\frac{c_{\mathrm{g}}}{4E}r\bar{\rho}^{r-1}E\delta\bar{\rho} - \frac{c_{\mathrm{g}}}{4\rho}p\bar{\rho}^{p-1}\rho\delta\bar{\rho}\right)\delta\bar{\rho}\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{e}} \tag{26}$$

再由

$$\boldsymbol{K}_{ij}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{e}} \tag{27}$$

对式(27)两边进行求导

$$\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial\bar{\rho}}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial\bar{\rho}} = \frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\bar{\rho}} \tag{28}$$

输入功率不依赖于设计变量,则 $\boldsymbol{F}' = 0$。则式(28)可以写为

$$\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial\bar{\rho}}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{K}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial\bar{\rho}} = 0 \tag{29}$$

可求出能量密度列向量对优化变量的偏导数,最后将得到的变量代入式(22)中可得多目标函数的灵敏度 $\frac{\partial M(\bar{\rho})}{\partial\bar{\rho}}$。

由单目标优化时OC(优化准则求解)法的基本原理,不难推出多目标优化的优化准则

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial\bar{\rho}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} + \lambda v_{\mathrm{e}} = 0 \tag{30}$$

式中,$\boldsymbol{k}$ 是惩罚的单元刚度矩阵,且

$$\boldsymbol{k} = \bar{\rho}^p\,\boldsymbol{k}_{\max} \tag{31}$$

式中,$\boldsymbol{k}_{\max}$ 为真实的单元刚度矩阵由式(30)~(31)得

$$-p(\bar{\rho}_{\mathrm{e}})^{p-1}\boldsymbol{e}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_{\max}\boldsymbol{e}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} + \lambda v_{\mathrm{e}} = 0 \tag{32}$$

进一步可得

$$\frac{-p(\bar{\rho}_{\mathrm{e}})^{p-1}\boldsymbol{e}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_{\max}\boldsymbol{e}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}}{\lambda v_{\mathrm{e}}} = 1 \tag{33}$$

为了达到迭代准则条件,建立更新设计变量得迭代格式为

$$\bar{\rho}_{n+1} = \bar{\rho}_{\mathrm{e}}^{n}\frac{p(\bar{\rho}_{\mathrm{e}})^{p-1}\boldsymbol{e}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_{\max}\boldsymbol{e}_{\mathrm{e}} + \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}}{\lambda v_{\mathrm{e}}} \tag{34}$$

当两次相邻更新设计变量的差值小于等于0.001时迭代停止,获得最优拓扑构型。

2 多目标拓扑优化的数值算例

2.1 模型验证

本节采用与文献[31]相同大小的薄板结构、材料参数、目标函数(最小能量柔度)来验证本方法的有效性,激励位置于薄板中心处大小为1 W/m^2,频率为300 Hz,边界条件为四边简支[31],其拓扑构型如图2所示。

从最优拓扑的对比可以看出,本研究方法结果与文献[31]的相比较,都是对边界四周单元的删除,说明本研究的可行性。

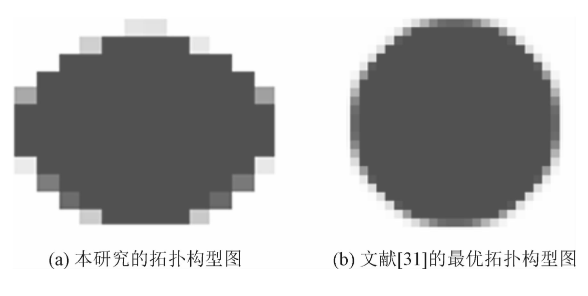


图 2　本研究方法的验证

Fig. 2　Validation of the method presented

2.2　几何模型介绍

本节以一矩形平板为研究对象,该矩形平板尺寸为 0.45 m × 0.3 m,厚度为 0.001 m,平板结构四边简支。对该平板进行网格划分,其中包括 1 350 个四节点板单元和 1 426 个节点,每个单元的尺寸为 0.025 m × 0.025 m。其坐标和矩形平板的网格模型如图 3 所示。

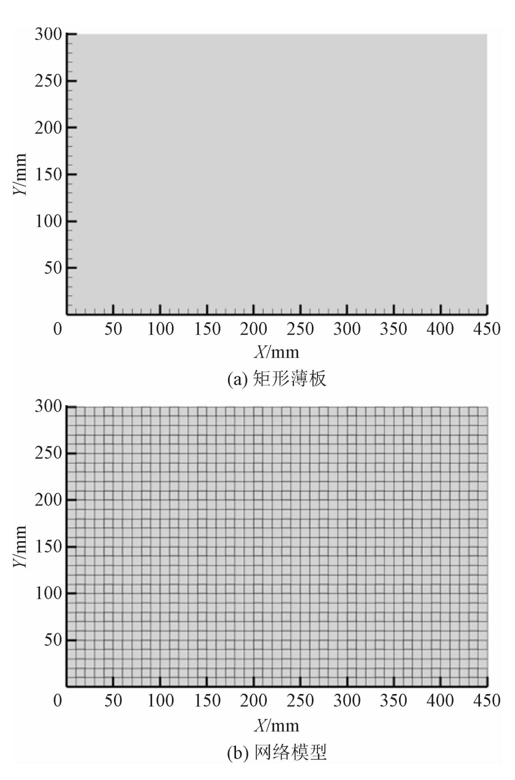


图 3　矩形薄板及其网格模型

Fig. 3　Rectangular thin plate and its mesh model

矩形薄板结构的材料参数如下:杨氏模量 $E = 2.1 \times 10^2$ GPa;泊松比 $\upsilon = 0.3$;阻尼系数 $\eta = 0.08$;板的密度 $\rho = 7.8 \times 10^3$ kg/m^3。施加垂直于薄板结构的输入功率流点载荷,输入功率流大小为 1 000 W/m^2,激励频率分别为 8 000、5 000、1 800、180 Hz,边界条件为四边简支,相应的能量密度大小为 0,激励位置如图 4 所示。

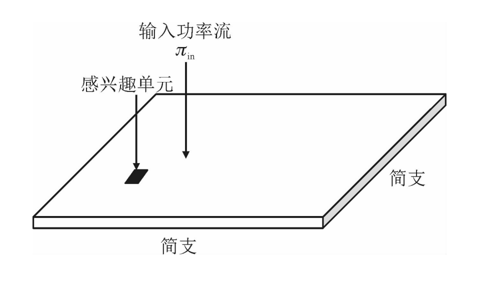


图 4　平板结构受到激励

Fig. 4　Plate structure subjected to point excitation

2.3　薄板结构多目标拓扑优化

以最小能量柔度和感兴趣单元(图 3)最小能量密度为目标函数,两个目标函数的权重系数 $w_1 = w_2 = 0.5$,分别计算载荷频率为 8 000、5 000、1 800、180 Hz 时的优化构型。图 5 ~ 8 为对应频率下的拓扑构型图,及目标函数随迭代次数的变化关系曲线。

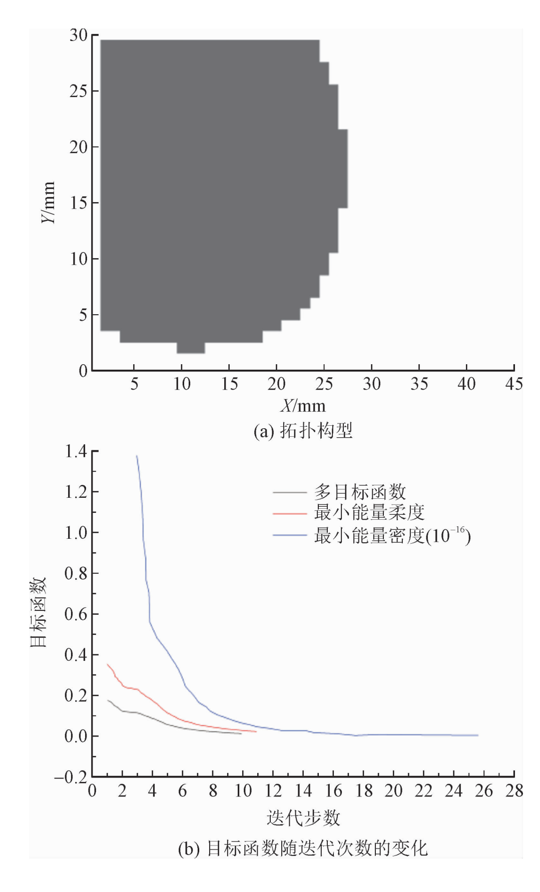


图 5　最优拓扑构型及目标函数随迭代次数的变化(f = 8 000 Hz)

Fig. 5　Variation of optimal topology and objective function with iterations (f = 8 000 Hz)

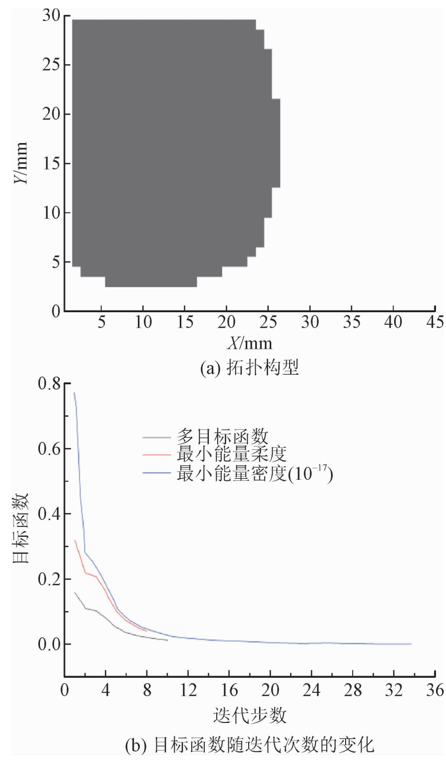


图 6 最优拓扑构型及目标函数随迭代次数的变化 ($f=5\ 000$ Hz)

Fig. 6 Variation of optimal topology and objective function with iterations ($f=5\ 000$ Hz)

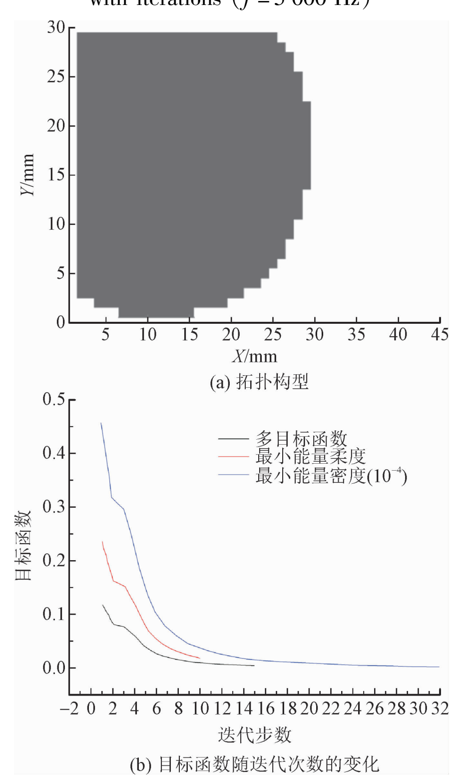


图 7 最优拓扑构型及目标函数随迭代次数的变化 ($f=1\ 800$ Hz)

Fig. 7 Variation of optimal topology and objective function with iterations ($f=1\ 800$ Hz)

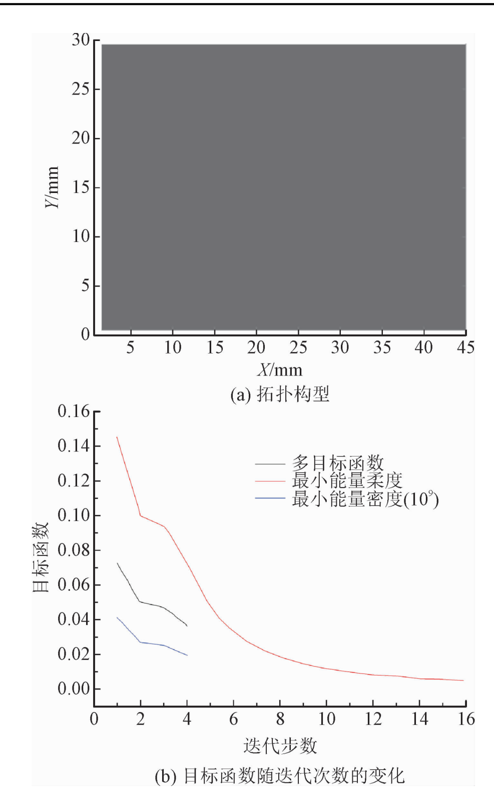


图 8 最优拓扑构型及目标函数随迭代次数的变化 ($f=180$ Hz)

Fig. 8 Variation of optimal topology and objective function with iterations ($f=180$ Hz)

由图 5～8 可知,随着迭代次数增加,目标函数在减小,说明本模型可以达到预期的优化目标。

从图 5～8 分析不同频率下的拓扑构型,可得如下结论:最优拓扑构型对激励频率非常敏感,加载频率为 $f=8\ 000$ Hz 时结构最复杂,最不容易加工制造;当频率降低到 $f=180$ Hz 时,得到的拓扑构型复杂度相对更低,从构型上看几乎没有得到优化。该结果进一步印证了结构的高频振动响应对结构细节信息较为敏感。

表 1 为在权重系数相同,频率分别为 8 000、5 000、1 800、180 Hz 时以最小能量柔度和感兴趣单元最小能量密度为优化目标的多目标优化结果。由表 1 可知,频率越高,减重百分比越大。

表 1 多目标优化的减重情况

Tab. 1 Weight loss with multi-objective optimization

激励频率/Hz	剩余单元数量	减重百分比/%
8 000	600	55.6
5 000	625	53.7
1 800	731	45.9
180	1 276	5.5

2.4　权重系数对拓扑优化构型的影响

本小节讨论当激振频率 $f = 8\,000$ Hz 时，施加载荷的位置、大小与上节相同的情况下，w_1 取值分别为 0.1、0.2、0.3、…、0.9 时的拓扑构型。图 9 为 w_1 和 w_2 取不同值时平板结构的多目标拓扑优化构型。

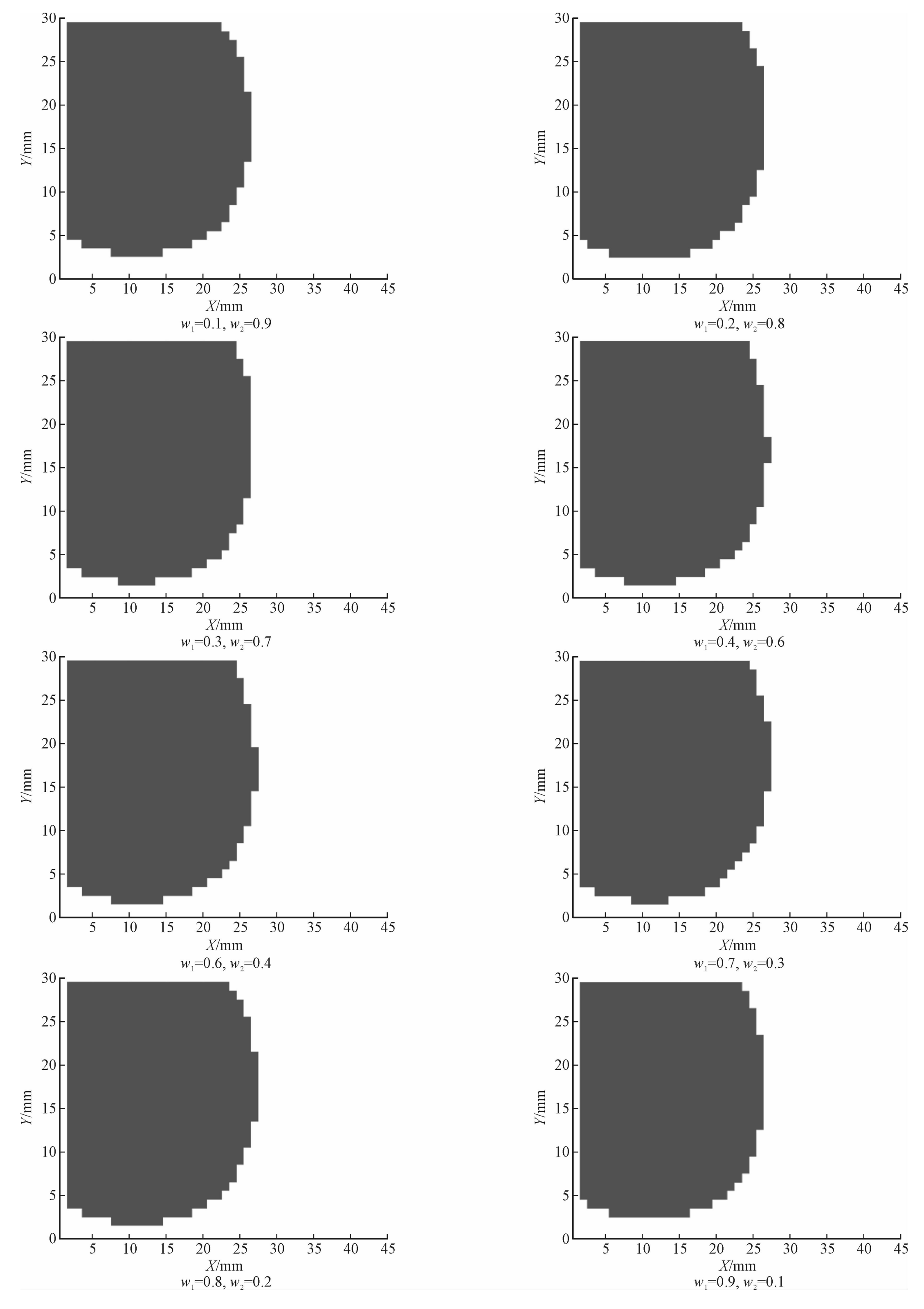


图 9　权重系数 w_1 从 0.1 到 0.9 变化的多目标拓扑构型

Fig. 9　Multi-objective topological diagram with weight coefficient w_1 varying from 0.1 to 0.9

由图9可知,在赋予不同权重时,拓扑构型会发生变化。表2为不同权重系数的情况下,得到构型的减重情况。

表2 $f = 8\,000$ Hz 时权重系数变化的减重情况

Tab. 2 Weight loss with weight coefficient change at $f = 8\,000$ Hz

权重系数 w_1	剩余单元数量	减重百分比/%
0.1	609	54.9
0.2	623	53.9
0.3	643	52.4
0.4	649	51.9
0.5	600	55.6
0.6	651	51.8
0.7	651	51.8
0.8	654	51.6
0.9	624	53.8

由表2可以看出,随着权重系数的变化,剩余单元数量与减重百分比也在变化,减重百分比在52%左右变化,其中 $w_1 = 0.5$ 时,减重百分比最大。对于航空航天产品来说,减重减振对于制造和应用具有重要的工程意义。

3 结 论

本研究以薄板结构为研究对象,以最小能量柔度和感兴趣单元的最小能量密度为优化目标,系统地研究了基于能量有限元的薄板结构多目标高频动力学拓扑优化方法。基于此方法,分析了不同频率以及不同权重系数对拓扑构型的影响。

1)在权重因子相同频率不同的情况下,薄板的拓扑构型都发生了改变,说明激励的频率范围会影响拓扑构型;随着激励频率的减小,优化后的减重百分比越来越低,在频率为180 Hz时优化构型几乎没有改变。

2)在频率相同权重因子变化时,拓扑构型有少量变化。从减重百分比来看,当最小能量柔度和感兴趣单元最小能量密度的权重比为 $w_1 : w_2 = 1:1$ 时,减重百分比最大。

本研究所提出的基于能量有限元法的结构多目标动力学拓扑优化方法适用于大尺寸薄壁结构,在航空航天领域及其他运载工具结构设计方面有一定的参考价值。

参考文献:

[1] BOUTHIER O M,BERNHARD R J. Models of space-averaged energetics of plates[J]. AIAA journal,1992,30(3):616-623.

[2] BOUTHIER O M,BERNHARD R J. Simple models of energy flow in vibrating membranes[J]. Journal of sound and vibration,1995,182(1):129-147.

[3] BOUTHIER O M,BERNHARD R J. Simple models of the energetics of transversely vibrating plates[J]. Journal of sound and vibration,1995,182(1):149-164.

[4] YAN X Y. Energy finite element analysis developments for high frequency vibration analysis of composite structures[D]. Ann Arbor:University of Michigan,2008.

[5] MORAVAEJI S J. Modeling of trim panels in the energy finite element analysis[D]. Ann Arbor:University of Michigan,2008.

[6] 何理,陈天宁,陈琛. 正交异性薄板的振动能量传递特性[J]. 西安交通大学学报,2019,53(3):50-55.
HE Li,CHEN Tianning,CHEN Chen. Transmission analysis of vibrational energy in orthotropic thin plates[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University,2019,53(3):50-55(in Chinese).

[7] 张桥,张卫红,朱继宏. 动力响应约束下的结构拓扑优化设计[J]. 机械工程学报,2010,46(15):45-51.
ZHANG Qiao,ZHANG Weihong,ZHU Jihong. Topology optimization of structures under dynamic response constraints[J]. Journal of mechanical engineering,2010,46(15):45-51(in Chinese).

[8] 刘虎. 结构动力学拓扑优化关键问题研究[D]. 西安:西北工业大学,2015.

[9] 薛晓光. 基于能量流分析的结构动力学拓扑优化理论与方法研究[D]. 长沙:国防科学技术大学,2013.

[10] 陈炉云,张裕芳. 基于改进渐进结构优化方法的结构动力优化研究[J]. 振动工程学报,2014,27(1):46-50.
CHEN Luyun,ZHANG Yufang. The study of structural dynamical optimization based on modified evolutionary structural optimization approach[J]. Journal of vibration engineering,2014,27(1):46-50(in Chinese).

[11] ZHANG W S,YANG W Y,ZHOU J H,et al. Structural topology optimization through explicit boundary evolution[J]. Journal of applied mechanics,2017,84(1):011011.

[12] 隋允康,彭细荣. 连续体结构拓扑优化的建模、求解和应用——基于阶跃函数的ICM方法[M]. 北京:清华大学出版社,2018.

[13] 李耀明. 板壳结构动力学拓扑优化设计理论方法研究及二次开发[D]. 北京:北京工业大学,2014.

[14] OLHOFF N,DU J B. Generalized incremental frequency method for topological designof continuum structures for minimum dynamic compliance subject to forced vibration at a prescribed low or high value of the excitation frequency[J]. Structural and multidisciplinary optimization,2016,54(5):1113-1141.

[15] 钟焕杰. 薄壁加筋结构的拓扑优化方法研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2015.

[16] XU M M,WANG S T,XIE X D. Level set-based isogeometric topol-

ogy optimization for maximizing fundamental eigenfrequency[J]. Frontiers of mechanical engineering,2019,14(2):222-234.

[17] LIU H L,LI B T,YANG Z H,et al. Topology optimization of stiffened plate/shell structures based on adaptive morphogenesis algorithm[J]. Journal of manufacturing systems,2017,43,Part 3:375-384.

[18] XUE X G,LI G X,XIONG Y P,et al. Power flow response based dynamic topology optimization of bi-material plate structures[J]. Chinese journal of mechanical engineering,2013,26(3):620-628.

[19] 李志强,张运章,宋艳丽.应力和位移约束下连续结构的有效拓扑优化方法[J].应用力学学报,2013,30(1):70-75.
LI Zhiqiang,ZHANG Yunzhang,SONG Yanli. An efficient structural topological optimization method for continuum structures with stress and displacement constraints[J]. Chinese journal of applied mechanics,2013,30(1):70-75(in Chinese).

[20] 曲东越,张海兵,徐建安,等.基于改进水平集结构拓扑优化方法的理论研究[J].应用力学学报,2019,36(4):895-900.
QU Dongyue,ZHANG Haibing,XU Jianan,et al. Theoretical research of structure topology optimization based on the level set method[J]. Chinese journal of applied mechanics,2019,36(4):895-900(in Chinese).

[21] 王栋,高伟峰.载荷位置不确定条件下结构稳健性拓扑优化设计[J].应用力学学报,2020,37(3):969-974.
WANG Dong,GAO Weifeng. Robust topology optimization of continuum structures with load position uncertainty[J]. Chinese journal of applied mechanics,2020,37(3):969-974(in Chinese).

[22] 王端义,徐文涛.航天结构带频率禁区的动力学拓扑优化设计[J].应用力学学报,2020,37(6):2574-2581.
WANG Duanyi,XU Wentao. Dynamic topological optimal design of aerospace structure with frequencies constraints[J]. Chinese journal of applied mechanics,2020,37(6):2574-2581(in Chinese).

[23] DU J B,OLHOFF N. Minimization of sound radiation from vibrating bi-material structures using topology optimization[J]. Structural and multidisciplinary optimization,2007,33(4):305-321.

[24] DU J B,OLHOFFN. Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps[J]. Structural and multidisciplinary optimization,2007,34(2):91-110.

[25] LIU H L,ZHANG Z Y,LI B T,et al. Topology optimization of high frequency vibration problems using the EFEM-based approach[J]. Thin-walled structures,2021,160:107324.

[26] 李凌飞.基于变密度法的结构拓扑优化研究[D].长春:吉林大学,2007.

[27] 孙晓辉,丁晓红.结构多目标拓扑优化设计[J].机械设计与研究,2012,28(4):1-4.
SUN Xiaohui,DING Xiaohong. Research on multi-objective topology optimization design methods for structure[J]. Machine design & research,2012,28(4):1-4(in Chinese).

[28] 杨旸.能量有限元分析法的研究及其在复合材料层合板中的应用[D].宁波:宁波大学,2013.

[29] 焦洪宇,周奇才,李英.基于 SIMP 材料插值模型的周期性结构拓扑优化[J].应用力学学报,2014,31(4):578-581.
JIAO Hongyu,ZHOU Qicai,LI Ying. Optimal design of periodic structures using SIMP method[J]. Chinese journal of applied mechanics,2014,31(4):578-581(in Chinese).

[30] 沈安林,肖守讷.车体结构多目标拓扑优化设计探讨[J].铁道机车车辆,2011,31(3):5-7.
SHEN Anlin,XIAO Shoune. Multi-objective study on carbody structure topology optimization[J]. Railway locomotive & car,2011,31(3):5-7(in Chinese).

[31] 赵贺桃.基于能量流分析的约束阻尼层合板拓扑优化方法[D].哈尔滨:哈尔滨工程大学,2019.

（编辑　吕茵）